СИСТЕМНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВТОРОЙ КРАТНОСТИ

И.В. Трифонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
itrif08@mail.ru

Нелинейные эволюционные операторы находят широкое приложение в исследовании динамических систем. Пусть X — пространство финитных слева бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси. Нелинейным эволюционным оператором второй кратности будем называть оператор вида:

$$Ax = \sum_{n_1,n_2} S_{n_1+n_2}(a_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})),$$

где суммирование проводится по неотрицательным целым n_1, n_2, таким, что $n_1 + n_2 = n > 0$, a_{n_1,n_2} — финитная обобщенная двухкомпонентная вектор-функция с носителем на $[0;+\infty)$, $x_1, x_2 \in X$, $S_{n_1+n_2}$ — оператор сокращения переменных n-го порядка, $*$ — операция свертки, $\otimes$ — операция тензорного произведения. Пусть $A^1 : X^2 \to X$, $A^2 : X^2 \to X$ — два нелинейных оператора, тогда можно построить систему из двух операторов $\{A^1, A^2\}$. Введем понятие системного оператора второй кратности.

Определение 1. Системным нелинейным эволюционным оператором второй кратности называется оператор A :

$$A(x_1, x_2) = (A^1(x_1, x_2), A^2(x_1, x_2)),$$

где A^1, A^2 — нелинейные эволюционные операторы второй кратности,

$$A^1 x = \sum_{n_1,n_2} S_{n_1+n_2}(a^1_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})), \quad A^2 x = \sum_{n_1,n_2} S_{n_1+n_2}(a^2_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})).$$

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Покажем применение теории нелинейных эволюционных операторов второй кратности для этой системы. Пусть задана система двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1^2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_2^2 + f_1(t), \quad \frac{dx_2}{dt} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_2^2 + f_2(t).$$

Система в операторном виде запишется следующим образом:

$$Ax = f,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_1 + A^1_2 \\ A^2_1 + A^2_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad A^1_1(x_1, x_2) = A^1_1 = (\delta' - \alpha_1 \otimes \delta) * x_1 - (\alpha_2 \otimes \delta) * x_2,$$

$$A^1_2(x_1, x_2) = A^1_2 = -(\alpha_3 \otimes \delta^{\otimes 2}) * x_1 \otimes x_1 - (\alpha_4 \otimes \delta^{\otimes 2}) * x_1 \otimes x_2 - (\alpha_5 \otimes \delta^{\otimes 2}) * x_2 \otimes x_2,$$

$$A^2_1(x_1, x_2) = -(\beta_1 \otimes \delta) * x_1 + (\delta' - \beta_2 \otimes \delta) * x_2,$$

$$A^2_2(x_1, x_2) = -(\beta_3 \otimes \delta^{\otimes 2}) * x_1 \otimes x_1 - (\beta_4 \otimes \delta^{\otimes 2}) * x_1 \otimes x_2 - (\beta_5 \otimes \delta^{\otimes 2}) * x_2 \otimes x_2.$$

Нахождение решения системы можно свести к построению компонент системного нелинейного эволюционного оператора второй кратности. Введем понятие асимптотического обратного оператора к оператору второй кратности и решим вопрос о построении его компонент.

Пусть A и B — нелинейные эволюционные операторы второй кратности. Построим композиции этих операторов: $Cx = B \circ A$, $Fx = A \circ B$.

Определение 2. Назовем оператор B левым асимптотическим обратным нелинейным оператором степени r к оператору A, если $C = I + \sum_{k_1+k_2 \geqslant r+1} C_{k_1,k_2}$, где I — тождественный оператор.

Определение 3. Назовем оператор B правым асимптотическим обратным нелинейным оператором степени r к оператору A, если $F = I + \sum_{k_1+k_2 \geqslant r+1} F_{k_1,k_2}$, где I — тождественный оператор.

Определение 4. Если оператор B будет левым и правым асимптотическим обратным оператором к A, то будем его называть нелинейным асимптотическим обратным оператором.

Например, асимптотический обратный оператор первой степени $B_1 y = b_{1,0} f_1 + b_{0,1} f_2$, так как $b_{1,0} * a_{1,0} = \delta$, следовательно, $b_{1,0} = (a^*_{1,0})^{-1}$. Получаем для первого приближения $x_1 = b_{1,0} * f_1 + b_{0,1} * f_2$. Нахождение компонент асимптотического обратного оператора заданной степени сводится к нахождению последовательных приближений решений системы.

О ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОГО КУБИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

А.Ю. Хамраев

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан
khamrayev@yandex.ru

В данной работе для одного вольтерровского кубического оператора на двумерном симплексе рассмотрено все неподвижные точки и польностью изучены траектории кубических операторов. Многочисленные задачи биологии решаются применением теории меры и теории динамических систем. Эти динамические системы определяются итерациями нелинейных операторов. Дадим определение таких операторов.

Пусть $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

Рассмотрим множество

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n : x_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

Множество S^{n-1} называется $(n-1)$-мерным симплексом. Каждый элемент $x \in S^{n-1}$ является вероятностной мерой на E и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической, социологической и т. п.) системы, состоящей из n элементов.

Одна из основных задач для данной системы состоит в изучении эволюции состояния системы. Обычно потомки состояния системы определяются некоторыми законами. Для решений задач возникающих в математической генетике используется квадратичные операторы, теория которых в настоящей время хорошо развита (см. например [1, 2]). В работе [6] для одного вольтерровского кубического оператора на двумерном симплексе найдены все неподвижные точки. Дано описание предельного множества траектории для некоторых подклассов таких операторов.

В настоящей работе мы изучаем динамические системы, задаваемые кубическими операторами. Состояние популяции описывается набором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вероятности разновидностей. Следовательно, $x \in S^{n-1}$.

При случайном скрещивании

$$x'_l = \sum_{i,j,k=1}^{n} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$